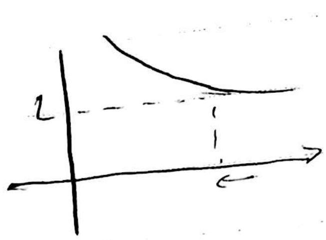
حد تابع

$\lim f(x)=L \equiv \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$

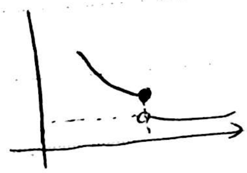
$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$\lim_{x\to 1} x^2=1$



$\lim_{x\to 1}[x] \to \lim_{x\to 1^+}[x]=[1^+]=1$

$\quad\quad\quad\ \to \lim_{x\to 1^-}[x]=[1^-]=0$



قضیه یکتایی حد

حد یک تابع در صورت وجود یکتاست.

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آنگاه

$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ و برعکس

حد راست تابع

حد چپ تابع

$a<x<a+\delta$

$a<x<a-\delta$

$\lim_{x\to 1}|x-1| = \lim_{x\to 1} x-1 = \lim_{x\to 1} 1-1=0$ / $\lim_{x\to 1} -x+1 = -1+1=0$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\frac{[0^+]}{0}=\frac{0}{0}$ مبهم

$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{[x]}=$

قضیه فشردگی

اگر $\lim_{x\to a} g(x)=L=\lim_{x\to a} h(x)$ و همچنین $g(x)\le f(x)\le h(x)$

آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)=L$

قضیه

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\frac{m}{n}$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin mx}{x}}{\frac{nx}{x}}=\frac{m}{n}$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}=m\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}=m$

$$\lim_{x\to 0}\frac{nx}{\sin mx}=\frac{n}{m}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{m}{n}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan mx}{\tan nx}=\frac{m}{n}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\tan nx}=\frac{m}{n}$$

توجه: در برخی از موارد با محاسبه حد با ابهام مواجه می‌شویم که باید ابهام آن را برطرف کنیم

مانند $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty\times\infty$ ، 1^∞ ، ...

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\underset{(x-1)(x+1)}{x^2-1}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\qquad \boxed{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\cancel{2}\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cancel{2}\frac{x}{2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos 0}{0^2}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=}$$

$$\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\cot^2 x}{x\csc x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{x\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}\cos^2 x}{\frac{\sin x}{\cancel{x}}}=\lim_{x\to 0}2\cos^2 x=2$$

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x}\ \overset{\frac{0}{0}\ \text{مبهم}}{=}\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin 0}=\frac{1}{0}=\infty$$

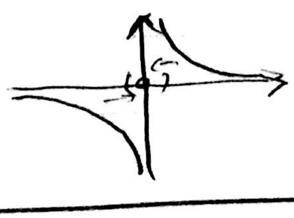
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{\cos x\sin x}=\frac{1-\sin 0}{\cos 0\,\sin 0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4x+4}=\frac{2-2}{4-8+4}=\frac{0}{0}\qquad \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)}{(x-2)^2}=-\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{0}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}=\frac{1-1}{1-1^2}=\frac{0}{0}\qquad \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(1-x)(1+x)}=-\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

$$\lim f(x)=\infty\equiv\forall M>0\ \exists\delta>0\quad |x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>M$$



$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$$

تعریف حد در بی نهایت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \equiv \forall \varepsilon>0 \;\; \exists M>0 \quad x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

اگر یک تابع گویا داشته باشیم (یعنی $\frac{f(x)}{g(x)}$) و هم چنین $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای باشند آنگاه در مورد $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ سه حالت رخ می دهد.

1) $\deg(f(x)) > \deg(g(x)) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{x^5+x^4+\cdots}^{x^5(1+\frac{1}{x})}}{2x^2}=\frac{x^5}{2x^2}=\frac{x^3}{2}=\infty$$

2) $\deg(f(x)) < \deg \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+7}{5x^4+7x^3+9x}$$

3) $\deg(f(x)) = \deg(g(x)) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+9}{4x+7x^2+8}=\lim\frac{x^2(3+\cancel{\frac{5}{x}}^{0}+\cancel{\frac{9}{x^2}}^{0})}{x^2(\cancel{\frac{4}{x}}_{0}+7+\cancel{\frac{8}{x^2}}_{0})}=\frac{3}{7}$$

دو تابع هم ارز

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در نقطه a هم ارز گوییم وقتی $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ و در این صورت از نماد $f \underset{x\to a}{\sim} g$ استفاده می کنیم.

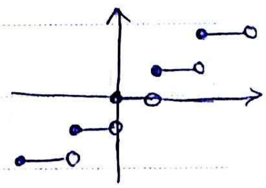
$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \sin mx \underset{x\to 0}{\sim} mx \qquad \tan mx \underset{x\to 0}{\sim} \sin mx$$

پیوستگی

تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته است اگر $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ آنگاه تابع دارای پیوستگی راست است و اگر $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ باشد آنگاه تابع دارای پیوستگی چپ است.

تابع	نقاط پیوستگی
چندجمله ای ها	$\mathbb{R}$
$\sinh x, \cosh x, \tanh x, \sin x, \cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}-(2k+1)\frac{\pi}{2} , k\in\mathbb{Z}$
$\cot x$	
$\coth x$	
a^x , e^x	
$\log_a^x , \ln x$	
$\lvert f(x)\rvert$	
$[x]$	$\mathbb{R}-\mathbb{Z}$



$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\frac{0}{0}$$

روابط هم ارزی را برای توابع هذلولی بیان کنید.

مقدار a را چنان بیابید که توابع زیر پیوسته باشند.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<3 \\ 2ax & x\geq 3\end{cases}$$

$f(x)=2ax$

$f(3)=6a$

$\lim_{x\to 3^-} x^2-1 = (3^2)-1=8$

$\lim_{x\to 3^+} 2ax = 2a(3)=6a$

$6a=8$

$a=\frac{4}{3}$

$$g(x)=\begin{cases} x^3 & x<\frac{1}{2} \\ ax^2 & x\geq \frac{1}{2}\end{cases}$$

$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} x^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

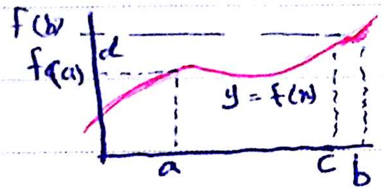
$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} ax^2 = (\frac{1}{2})^2 a = \frac{1}{4}a$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}a$

$\frac{1}{4}a=\frac{1}{8}$

a

قضیه مقدار میانی اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه برای هر عدد بین $f(a)$ و $f(b)$ مانند d یعنی $f(a)<d<f(b)$ عددی بین a و b مانند c وجود دارد که $f(c)=d$



مشتق

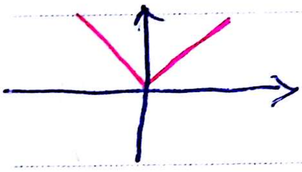
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

تابع $f(x)$ را در نقطه x_0 مشتق‌پذیر گوییم هرگاه حد فوق موجود باشد.

قضیه اگر تابع $f(x)$ در x_0 مشتق‌پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته است.

مشتق چپ و راست را تعریف کنید.

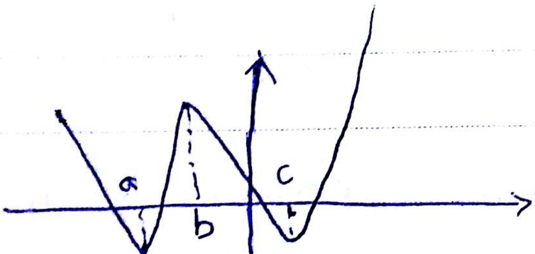
تابع $f(x)=|x|$ همه‌جا بغیر مبدأ مشتق‌پذیر است.



$$f'(0) = \lim \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$$

مثال



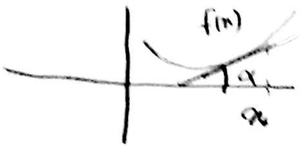
مشتق‌پذیری = نداشتن شکستگی

$A=\left\{\begin{bmatrix}a\\f(a)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}b\\f(b)\end{bmatrix}\right\}$ نقاطی که مشتق‌ناپذیر هست

$\mathbb{R}-\{a,b\}$ نقاطی که مشتق‌پذیر هست.

مشتق به عنوان شیب خط مماس

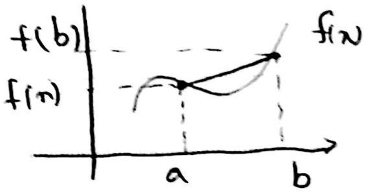
برای تابع $y=f(x)$ ، $f'(x_0)$ برابر با شیب خط مماس بر $y=f(x)$ در نقطه $x=x_0$ است.



$$m = \tan\alpha = f'(x_0)$$

قضیه مقدار میانگین: اگر $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه حداقل یک c در $[a,b]$ است که

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ شیب



قواعد مشتق‌پذیری

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f \Rightarrow (cf)' = cf'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = g'(x) f'(g(x)) \rightarrow (f(u))' = u' f'(u)$$

$$(x^n)' = n x^{n-1} \sim (u^n)' = n u' u^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \rightarrow (\sin u)' = u' \cos u \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

$$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x)$$

$(f\circ f)^{-1}(x) = x$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$(f^{-1}(f(x)))' = \frac{1}{f'(x)}$ Yaer. Month. Day.

Subject. $(f^{-1}(x))' \quad (f'(f^{-1}(x))) = 1$

$f(x) = \sin x \quad f^{-1}(x) = \arcsin x$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos x}$

$f(y)$

$(\arcsin f^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\sec x)'$

$(\csc x)'$

$(\arcsin x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\sinh x)' = \cosh x \rightsquigarrow (\sinh x)' = u' \cosh u$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\tanh x)' = 1 - \tan^2 x$

$(\coth x)' = 1 - \cot^2 x$

$(\operatorname{sech} x)' = \left(\frac{1}{\cosh x}\right)' = -\frac{u'}{u^2} = \frac{-\sinh x}{(\cosh x)^2} = \frac{-\tanh x}{\cosh x}$

$(\operatorname{csch} x)' = \left(\frac{1}{\sinh x}\right)' = \frac{-u'}{u^2} = \frac{-\cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{-\coth x}{\sinh x}$

$(\operatorname{arcsinh} x)' = (\ln(x + \sqrt{x^2+1}))'$

$(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(e^x)' = e^x \rightsquigarrow (e^u)' = u' e^u$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \rightsquigarrow (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a x)' \rightsquigarrow (\log_a u)' =$

$(x^x)' =$

$(u^v)' =$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

$(a^x)' \quad (e^{\ln a^x}) = (\ln a^x)' a^x = (x \ln a)' a^x = (\ln a) a^x = a^x \ln a$

$(x^x)' \quad (e^{\ln x^x}) = (\ln x^x)' x^x = (x \ln x)' x^x = (\ln x + \frac{x}{x}) x^x$

$(\ln x + 1) x^x$

NADERI

$(u^v)' = (e^{\ln u^v})' = (\ln u^v)' u^v = (v . \ln u)' . u^v = (v' \ln u + \frac{u'}{u} . v) . u^v$

$(\sin x^{\cos x})' = (-\sin x . \ln \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} . \cos x) . \sin x^{\cos x}$

$((\tan x)^{\frac{1}{x}})' =$

$((\cosh \sqrt{x})^x)' =$

$((x^4+3x^2)^{\sin^2 x})' =$

$((1+\tan 4x)^{\sin^2 x})' =$

$((\arcsin hx)^{\cos^2 x})' = ?$

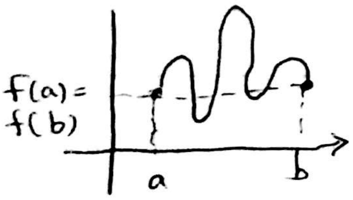
$(2x^{\tan 2x})' =$

$(\frac{1}{\sqrt{x}}^{\sin x})' =$

$((\sin x)^{\sqrt{x}})' =$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین قضیه رول را اثبات کنید.

قضیه رول: فرض کنید $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق پذیر باشد و داشته باشیم $f(a)=f(b)$ در این صورت حداقل یک $c \in (a,b)$ وجود دارد که داریم $f'(c)=0$



مشتق مراتب بالاتر: برای تابع مشتق پذیر $f(x)$ اگر $f'(x)$ نیز مشتق پذیر باشد، مشتق آن را با $f''(x)$ نمایش می دهیم به عبارت دیگر

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \qquad f^{(n)}(x) = n!\, a_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

مشتق توابع ضمنی

اگر تابع به صورت $y=f(x)$ باشد یعنی متغیر y به صراحت به متغیر مستقل x وابسته باشد آنگاه به شیوه هایی که تاکنون بیان شد می توانیم مشتق را محاسبه کنیم. اما اگر چنین نباشد یعنی رابطه ضمنی (تلویحی) برای متغیرهای x و y را داشته باشیم، در این صورت برای مشتق گرفتن (محاسبه تغییرات متغیر y نسبت به متغیر x) دو راهکار وجود دارد.

عبارت را به صورت $F(x,y)=0$ می‌نویسیم و از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$F'_x \quad F'_y + y'_x$$

یادآوری

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "f'_u = \frac{df}{du}"'] \arrow[rr, bend left] & u \arrow[r, "u'_x = \frac{du}{dx}"'] & x \end{tikzcd}$$

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\begin{tikzcd} & & f \arrow[dl, "f_u"'] \arrow[dr, "f_v"] & & \\ & u \arrow[dl, "u'_x"'] \arrow[d, "u'_y"] & & v \arrow[dl, "v'_x"'] \arrow[dr, "v'_y"] & \\ x & y & x & & y \end{tikzcd}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \times \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dy} + \frac{df}{dv} \times \frac{dv}{dy}$$

حالت خاص آن

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "F_x"'] \arrow[dr, "F_y"] & \\ x & & y \arrow[d, "y'_x"] \\ & & x \end{tikzcd}$$

F مشتق $= 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} dx = -\frac{\partial F}{\partial y} dy \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

برای رابطه‌ای که برحسب دو متغیر تعریف شده است مانند $F(x,y)$ منظور را از مشتق کل F، عبارت زیر است

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

Year. Month. Day. Subject

اگر $f(x,y)=x^2+2y$ و $x(t,s)=e^{\frac{s}{t}}$, $y(s,t)=t\sin s$ آنگاه مطلوب است

$$\frac{\partial f}{\partial s}=(2x)\left(\frac{1}{t}e^{\frac{s}{t}}\right)+2(t\cos s)=\left(2e^{\frac{s}{t}}\right)\left(\frac{1}{t}e^{\frac{s}{t}}\right)+2t\cos s$$

$$\frac{\partial f}{\partial f}=$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{1}{t}e^{\frac{s}{t}} \qquad \frac{\partial x}{\partial t}=-\frac{s}{t^2}e^{\frac{s}{t}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}=t\cos s \qquad \frac{\partial y}{\partial t}=\sin s$$

$2x^3-3y^2=7$ y'' را حساب کنید

برای مشتق گرفتن از یک عبارت ضمنی، y را تابعی از x در نظر می گیریم و مشتق آن نسبت به x را با y' یا $\frac{dy}{dx}$ نمایش می دهیم در پایان از تمام عبارت های y' فاکتور گرفته و جواب به دست می آید.

$$x^2+y^2=25$$

$$2x+2yy'=0 \qquad yy'=-x \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$$

$$2x'x+2y=0 \qquad \frac{dx}{dy} \quad x'=-\frac{y}{x}$$

NADERI

توابع پارامتری: توابعی به صورت $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ را توابع پارامتری گوییم که در آن داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dt}}$$

با استفاده از قاعده زنجیره های رابطه بالا تحقیق کنید.

$$\begin{array}{c} y \\ | \\ x \\ | \\ t \end{array}$$

اگر $\begin{cases} x(t)=t-t^2 \\ y(t)=t-t^3 \end{cases}$ آنگاه:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-3t^2}{1-2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}$$

یادآوری: معادله خطی که از نقطه $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ عبور کرده و دارای شیب m است از رابطه زیر بدست می آید.

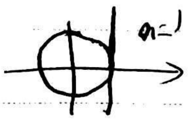
$$y-y_0=m(x-x_0$$

شیب خط قائم بر خطی که دارای شیب m است برابر است با $-\frac{1}{m}$.

مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=x_0$ برابر است با شیب خط مماس بر تابع در نقطه مماس

بنابراین می توان معادله خط مماس و قائم بر توابع مختلف را در نقاط داده شده را محاسبه کرد.

$x^2+y^2=1$ $\qquad x_0=1$



$m=y'(1)=-\frac{x}{y}=-\frac{1}{0}$

$x=1 \Rightarrow y=0$ $\qquad$ شیب خط مماس $=\infty \Rightarrow x=1$

کاربرد مشتق و شناخت ویژگی های هندسی تابع

اگر برای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x)>0$ آنگاه تابع $f(x)$ در (a,b) صعودی است.

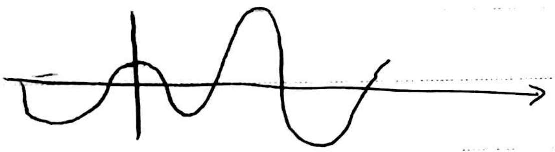
اگر برای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x)<0$ آنگاه تابع $f(x)$ در (a,b) نزولی است.

اگر برای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x)=0$ آنگاه تابع $f(x)$ ثابت است.

تعریف: منظور از نقطه بحرانی، نقطه‌ای است که مشتق تابع در آن موجود نباشد یا صفر گردد.

اگر در بازه‌ای شامل نقطه‌ای به طول x_0، $f(x)$ از همه عرض‌ها بیشتر باشد نقطه $\begin{bmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{bmatrix}$ را max موضعی می‌گوییم.

min موضعی



$\begin{bmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{bmatrix}$ max مطلق تابع $f(x)$ است اگر $f(x_0)$ از نقاط عرض های تابع بیشتر باشد.

$\begin{bmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{bmatrix}$ min مطلق تابع $f(x)$ است اگر $f(x_0)$ از نقاط عرض های تابع کمتر باشد.

نکته: برای یافتن نقاط اکسترمم (max یا min) تابع، ابتدا نقاط بحرانی را می‌یابیم. اگر برای نقطه x_0 که در آن $f'(x_0)=0$ در نقاط قبل از آن $f'(x)>0$ (یعنی تابع صعودی باشد) و برای نقاط بعد از آن $f'(x)<0$ (یعنی تابع نزولی باشد) آنگاه x_0 طول نقطه max موضعی خواهد بود. پس از محاسبه عرض نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ها بیشترین عرض بین کاندیداهایی که به دست آمد از max های موضعی و آن ها عرض max مطلق است.

آزمون مشتق دوم: اگر برای نقاط کاندیدای اکسترمم شدن روابط زیر را داشته باشیم می‌توان نوع max یا min را مشخص کنیم.

$f''(x_0)>0$ — x_0 طول نقطه min است.

$f''(x_0)<0$ — x_0 طول نقطه max است.

تعریف تقعر تابع $y=f(x)$ در بازه (a,b) رو به بالا است اگر $f''(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$

f' تابع صعودی است.

و اگر تقعر تابع $y=f(x)$ در بازه (a,b) رو به پایین باشد اگر $f''(x)<0$ $\forall x\in(a,b)$

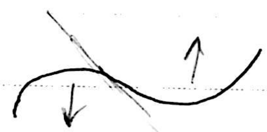
نقطه $\begin{bmatrix} x_0 \\ f(x_0)\end{bmatrix}$ را نقطه عطف تابع $y=f(x)$ گوییم هرگاه $f''(x_0)=0$ تابع در نقطه x_0 تغییر تقعر دهد.

$f(x)=(x-1)^3+1$

نقطه عطف $[1,1]$

$f(x)=x^3$

نقطه عطف $[0,0]$



ویژگی: خط مماس در نقطه عطف نمودار تابع را قطع می‌کند.

اگر نقطه $x=1$ طول نقطه عطف $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ باشد، b را بیابید.

$f'(x)=3x^2+2bx+c$

$f''(x)=6x+2b=0 \qquad 6=-2b \qquad b=-3$

قضیه هوپیتال

اگر $f(a)=g(a)=0$ و هم‌چنین $f'(a)$, $g'(a)$ موجود باشند، $g'(a)=0$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(x)}$$

با برقراری شرایط، می‌توان چند بار از قضیه هوپیتال استفاده کرد.

$$\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{\lim\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim\frac{\frac{f(x)-f(a)}{\cancel{x-a}}}{\frac{g(x)-g(a)}{\cancel{x-a}}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\cancel{f(a)}^{0}}{g(x)-\cancel{g(a)}_{0}}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

ابتدا مسئله را بر اساس یک متغیر مستقل فرمول بندی می کنیم (به وسیله روابط ریاضی بیان می کنیم) سپس نقاط بحرانی را برای اکسترمم شدن را می یابیم و با استفاده از آزمون مشتق دوم نوع اکسترمم را تعیین می نماییم.

بیشترین مساحت مستطیل را حساب کنید که محیط آن ۲۴ باشد.

$2(x+y)=24 \Rightarrow x+y=12 \Rightarrow y=12-x$

$S(x)=xy=x(12-x)=-x^2+12x$

$S'(x)=-2x+12=0 \Rightarrow \boxed{x=6}$

آیا بیشترین مساحت مثلث متساوی الساقین نیز زمانی رخ می دهد که مثلث، متساوی الاضلاع است؟

اگر محیط مثلث متساوی الساقین ۱۸ باشد، بیشترین مساحت آن را بیابید. (طول ساق آن x است)

قبلا در تعریف مشتق دیدیم که

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

اگر Δx مقداری نزدیک به صفر باشد رابطه تقریبی زیر را داریم:

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad f'(x_0)\Delta x \simeq f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

$f(x_0+\Delta x) \simeq f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

$\sqrt{۱۵}$

$f(x)=\sqrt{x}$

$x_0=۱۶ \Rightarrow f(x_0)=\sqrt{۱۶}=۴$

$\Delta x=۱۵-۱۶=-۱$

$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \rightarrow f'(x_0)=\frac{۱}{۲\sqrt{۱۶}}=\frac{۱}{۸}=۰{,}۱۲۵$

$\sin ۳۱^\circ$ $\quad \cos ۲۹^\circ \quad \tan ۶۳ \quad \cot ۴۶^\circ$

$۱{,}۱^{۱{,}۱}$

$f(x)=x^x \quad x=۱ \quad f(۱)=۱^۱=۱$

$f'(x)=x^x(\ln x+۱) \longrightarrow f'(۱)=۱^۱(\ln ۱+۱)=۱$

$\Delta x=۱{,}۱-۱=۰{,}۱$

$\Delta x=۱{,}۱-۱=۰{,}۱$

$۱{,}۱-۱=۰{,}۱ \simeq ۱{,}۱$

$۱{,}۱^{۰{,}۹}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\tan x}{۱+\tan x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \frac{۱+\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}=۱$

$\frac{\tan x+۱-۱}{۱+\tan x} = ۱-\frac{۱}{۱+\tan x}$

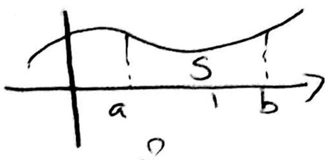
$$\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = 1^{\infty}$$ مبهم

$$\lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}} \overset{H}{\leadsto} e^{\lim \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = e^{1} = \boxed{e}$$

$$\lim (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

حساب انتگرال



$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

انتگرال را به عنوان ضد مشتق در نظر می‌گیریم یعنی اگر

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$ مشتق

$$F'(x) = f(x)$$ آنگاه

قواعد انتگرال‌گیری

1) $(cf)' = cf'$ $\quad \int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

2) $(f \pm g)' = f' \pm g'$ $\quad \int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

$(\int f)' = f$ $\quad \int f' = f$ $\quad$ وقتی انتگرال و مشتق ضد یکدیگرند پس

فرمول های انتگرال

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\quad n = -1$

۲) $\int x^{-1} dx = \ln x + C$

۳) $\int \cos x = \sin x + C$ $\quad \int \sin x dx = -\cos x + C$

۴) $\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$ $\quad \int -(1 + \cot^2 x) dx$

۵) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$\hookrightarrow a^x = \int a^x \ln a \, dx \rightarrow a^x = \ln a \int a^x dx \Rightarrow \int a^x dx$

درحالت خاص $\int e^x dx = e^x + C$

۶) $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$ $\quad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C$

$\int (1 - \tanh^2 x) dx$ $\quad \int -(1 - \coth^2 x) dx$

$\int fg \overset{?}{=} (\int f)(\int g)$

$f = 1$
$g = 1$

$\int 1 dx = x$

$(\int 1)(\int 1) = x^2$

$(fg)' = f'g + fg'$

$fg = \int f'g + \int fg'$

$\boxed{\int fg' = fg - \int f'g}$ قاعده جزء به جزء انتگرال گیری

Yaer. Month. Day. Subject.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \overset{u}{x} \overset{dv}{\sin x\,dx} = ?$$

مشتق

$$\operatorname{arctan} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

$$x = f(f^{-1}(x)) = \tanh\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{e-1}{e^{2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}+1} = \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\frac{1+x}{1-x}+1} =$$

$$\frac{1+x-(1-x)}{1+x+1-x} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = x$$

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

مشتق

$$\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

انتگرال های زیر را محاسبه کنید:

$u=۲x \xrightarrow{d} du=۲dx$

$\frac{1}{۲}\int e^{۲x}\,۲dx = \frac{1}{۲}e^{۲x}+c$

$u=\frac{x}{۲} \xrightarrow{d} du=\frac{dx}{۲}$

$۲\int \cos\frac{x}{۲}\,\frac{dx}{۲} = ۲\sin\frac{x}{۲}+c$

$u=۳x-۷ \xrightarrow{d} du=۳dx$

$\frac{1}{۳}\int (۳x-۷)^{۸}\,۳dx = \frac{1}{۳}\,\frac{(۳x-۷)^{۹}}{۹}+c$

$\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\int\frac{du}{u} = -Ln\,u+c = -Ln|\cos x|+c$

$\frac{1}{۲}\int\frac{۲(x+1)}{x^{۲}+۲x+۳} = \frac{1}{۲}Ln|x^{۲}+۲x+۳|+c$

$u=x^{۲}+۲x+۳$
$du=(۲x+۲)dx$
$۲(x+1)dx$

$u=\frac{x}{۳} \xrightarrow{d} du=\frac{dx}{۳}$

$۳\int \sinh\frac{x}{۳}\,\frac{dx}{۳} = ۳\cosh\frac{x}{۳}+۳$

$\int e^{x^{۳}+۳x}(x^{۲}+1)\,dx =$

$\frac{1}{۳}\int ۳e^{x^{۳}+۳x}(x^{۲}+1)\,dx$

$\int 1+\tan^{۲}x-1\,dx = \int(1+\tan^{۲}x-1)\,dx = \tan x - x + c$

$\int\frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{۲x}}}dx = \int\frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{1-e^{x}}} = \int\frac{du}{\sqrt{1-u^{۲}}} = \arcsin u + c = \arcsin e^{x}+c$

$u=e^{x} \xrightarrow{d} du=e^{x}dx$

Yaer. Month. Day. Subject.

$$\int \frac{2^x}{1+4^x}\,dx =$$

$$\int \overset{u}{\sin x}\ \overset{du}{\cos x\,dx} = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

$$\int \frac{1}{x \ln x}\,dx = \int \frac{1}{\underbrace{\ln x}_{u}} \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{\underbrace{\ln x}_{u}} \overset{du}{\frac{dx}{x}} = \int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + c$$

$$\int \frac{1}{\ln x^{x}}\,dx$$